Ecuaciones Diferenciales I
Examen XXIV

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Ecuaciones Diferenciales I Examen XXIV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Arturo Olivares Martos

Granada, 2024-2025

Asignatura Ecuaciones Diferenciales I

Curso Académico 2022-23.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Rafael Ortega Ríos.

Descripción Parcial 2.

Fecha 20 de Diciembre de 2022.

Ejercicio 1. Se considera la ecuación diferencial de segundo orden

$$(1+2t+t^2)x'' + 2(1+t)x' - 2x = 0.$$

1. Encuentre una solución del tipo $x = at + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ adecuadas. ¿Es esta solución única? ¿Se puede formar un sistema findamental con soluciones de este tipo?

   Para que $x = at + b$ sea solución de la ecuación, calculamos sus derivadas:

   $$x'(t) = a, \quad x''(t) = 0.$$

   Sustituyendo en la ecuación, obtenemos

   $$2(1+t)a - 2(at+b) = 0 \Longrightarrow 2(a-a)t + 2(a-b) = 0$$

   Por tanto, para cada $a \in \mathbb{R}$, tenemos que:

   $$x_a(t) = a(t+1) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   es una solución de la ecuación. Por tanto, tenemos que no es única. No obstante, no podemos formar un sistema fundamental con soluciones de este tipo, ya que dados $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, veamos $x_{a_1}(t), x_{a_2}(t)$ que son linealmente dependientes.

   - Si $a_2 = 0$, entonces se tiene de forma directa que es linealmente dependiente.
   - Si $a_2 \neq 0$, entonces:

     $$x_{a_1}(t) = \frac{a_1}{a_2} \cdot a_2(t+1) = \frac{a_1}{a_2} x_{a_2}(t).$$

     Por tanto, también son linealmente dependientes.

2. Use la fórmula de Liouville para completar un sistema fundamental de la ecuación.

   Sea $x_1(t) = t+1$, y sea $\varphi(t)$ una solución linealmente independiente de $x_1(t)$, que sabemos que existe por ser $\dim Z = 2$. Calculemos su Wronskiano:

   $$W(x_1, \varphi)(t) = \begin{vmatrix} t+1 & \varphi(t) \\ 1 & \varphi'(t) \end{vmatrix} = (t+1)\varphi'(t) - \varphi(t).$$

   En primer lugar, para que $\{x_1, \varphi\}$ sean linealmente independientes, imponemos que, fijado $t_0 = 0$, se tenga $W(x_1, \varphi)(0) = 1$. Por tanto, por la fórmula de Jacobi-Liouville, tenemos que la solución buscada cumple la ecuación, válida para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

   $$W(x_1, \varphi)(t) = W(x_1, \varphi)(0) \exp\left(-\int_0^t a_{k-1}(s)\ ds\right)$$
   $$W(x_1, \varphi)(t) = 1 \exp\left(-\int_0^t \frac{2(1+s)}{(1+2s+s^2)}\ ds\right)$$
   $$W(x_1, \varphi)(t) = \exp\left(-\int_0^t \frac{2}{1+s}\ ds\right) = \exp\left(-2\ln(|1+t|)\right) = \frac{1}{(1+t)^2}.$$

Por tanto, la solución buscada cumple la ecuación diferencial:

$$(t+1)\varphi' - \varphi = \frac{1}{(1+t)^2} \Longrightarrow \varphi' = \frac{\varphi}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^3}$$

Por tanto, y tomando como constante de integración 0 (ya que solo buscamos una solución), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= e^{\ln|t+1|} \int e^{-\ln|s+1|} \frac{1}{(s+1)^3}\, ds \\
&= |t+1| \int \frac{1}{|s+1|(s+1)^3}\, ds \\
&= -|t+1| \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{|t+1|(t+1)^2} = -\frac{1}{3(t+1)^2}.
\end{aligned}$$

Por tanto, un sistema fundamental de la ecuación (considerando un dominio $\Omega \subset \mathbb{R} \setminus \{-1\}$) es:

$$\left\{ x_1(t) = t+1,\ \varphi(t) = -\frac{1}{3(t+1)^2} \right\}.$$

Ejercicio 2. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x + 2x.$$

por el método de variación de constantes

Ejercicio 3. Encuentre la solución general del sistema

$$x' = Ax + b,$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. ¿Tiene este sistema soluciones constantes?

Estudiemos en primer lugar si tiene soluciones constantes. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, de forma que:

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad x'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De esta forma, buscamos x_1, x_2 tales que:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 0$, tenemos que ese sistema es incompatible, por lo que no tiene soluciones constantes. Busquemos por tanto resolver el sistema. Notando a $x = (x_1, x_2)^t$, tenemos que:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 + 1 \\ x_2' = 2 \end{cases}$$

Por tanto, tenemos que:

$$x_2(t) = 2t + c_2$$

Resolvemos ahora por tanto la ecuación para x_1:

$$\begin{aligned}
x_1' = x_1 + 2(2t + c_2) + 1 \Longrightarrow x_1(t) &= e^t \left(c_1 + \int e^{-s} \left(4s + 2c_2 + 1\right)\ dt \right) \\
&= e^t \left(c_1 - e^{-t}(4(t+1) + 2c_2 + 1) \right) \\
&= c_1 e^t - (4t + 2c_2 + 5)
\end{aligned}$$

Por tanto, la solución general del sistema es:

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(4t+5) \\ 2t \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Calcule (en función de A) la matriz fundamental principal en cero del sistema $x' = Ax$, sabiendo que $A^2 = A$.

Calculemos en primer lugar e^{tA}:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}$$

Usando que $A^n = A$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $A^0 = I$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A}{n!} = \sum_{n=0}^{0} \frac{t^n I}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n A}{n!} = I + A \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = I + A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{0} \frac{t^n}{n!} \right) \\
&= I + A(e^t - 1)
\end{aligned}$$

Por tanto, usando lo visto en Teoría, tenemos que la matriz fundamental principal en cero del sistema es:

$$\Phi(t) = e^{tA} = I + A(e^t - 1)$$